

Isométries par morceaux

Nicolas Bédaride

Université Aix Marseille

Considérons un nombre fini d'hyperplans de \mathbb{R}^n , $H_1 \dots H_k$. Soit $X = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i \leq k} H_i$ le complémentaire des hyperplans. Une **isométrie partielle** de \mathbb{R}^n est une application T :

- définie sur X ,
- la restriction de T à un ensemble connexe est une isométrie de \mathbb{R}^n ,
- l'application est bijective (pas nécessaire).

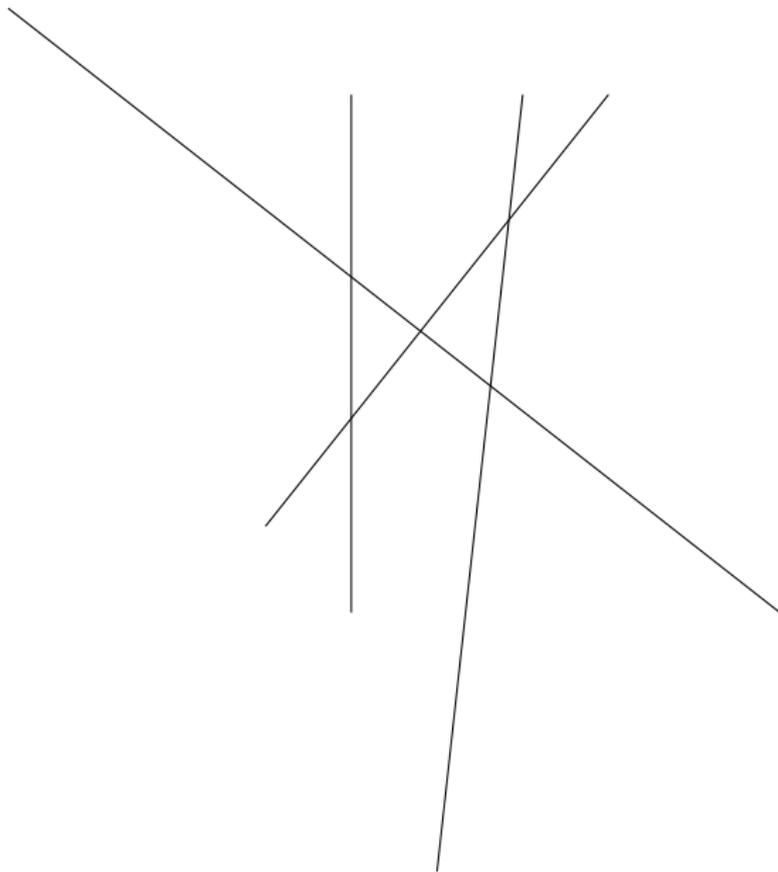


Figure: Partition du plan

Lemma

L'orbite d'un point m est définie pour presque tout point $m \in X$.

Theorem (Buzzi)

L'entropie topologique est nulle.

$$h(T) = \lim_{+\infty} \frac{\log p(n)}{n}$$

Donc on peut regarder la dynamique symbolique !

Le **codage** de l'application consiste à associer une lettre à chaque isométrie définissant T . On définit alors ϕ :

$$\phi : X \mapsto \{1 \dots l\}^{\mathbb{N}}$$

$$\phi(m) = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

u_n est le nom de l'isométrie définie sur un voisinage de $T^n m$. Le nombre de composantes connexes de X est noté l .

Définissons $\Sigma = \overline{\phi(X)}$, pour la topologie produit.

L'ensemble Σ est l'ensemble de tous les mots infinis codage de trajectoire.
Un mot de longueur n inclus dans une suite de Σ est un mot du langage de l'application.

La **cellule** d'un mot v est

$$\sigma_v = \{m \in X, Tm \in P_{v_i} \quad \forall i \in [0 \dots |v| - 1]\}$$

On peut aussi définir la cellule d'un mot infini.

$$\begin{array}{ccc} T & X & \rightarrow X \\ & | & \\ S & \Sigma & \rightarrow \Sigma \end{array}$$

Mot v	Cellule
Mot fini	Polygone
Mot périodique	Polygone, disque
Mot non périodique	Fractale
Substitution	Ensemble auto-similaire

Definition

Si T est une application de X dans lui-même et A une partie de X , l'application induite de T sur A est définie par $T_A(z) = T^{r_A(z)}(z)$ avec $r_A(z) = \min\{n > 0, T^n(z) \in A\}$ pour tout $z \in A$ ou $r_A(z)$ est fini.

$$T : X \mapsto X$$

Codage par des ensembles $U_i, i = 1 \dots l$.

Application de premier retour de T sur U_1 : T_{U_1} .

Considérons la partition de U_1 telle que le temps de retour n_x soit constant sur chaque partie.

Le langage associé est noté L_{U_1} .

Plusieurs mots de retour. $v_i, i = 1 \dots k$

Chacun est un mot de longueur n_x qui code l'orbite $T^j x, j = 0 \dots n_x - 1$.

Définissons la substitution α par

$$\begin{cases} \alpha_{U_1}(1) = v_1 \\ \vdots \\ \alpha_{U_1}(k) = v_k \end{cases}$$

Lemma

- En général on a

$$\alpha_{U_1}(L_{U_1}) \subset L_U.$$

- Si les applications sont définies pour tout ensemble U_i , on a

$$\bigcup_{i=1}^I \alpha_{U_i}(L_{U_i}) = L_U.$$

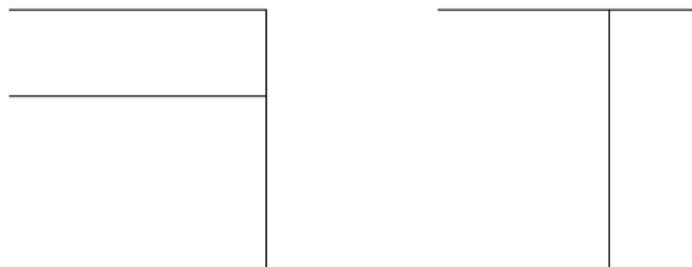
- Supposons qu'il existe un homéomorphisme h entre X et U_1 tel que pour tout $x \in X$ on ait $h^{-1} \circ T_{U_1} \circ h(x) = T(x)$. Alors on a

$$L_{U_1} = L_U.$$

De plus L_U est stable par α_{U_1} .

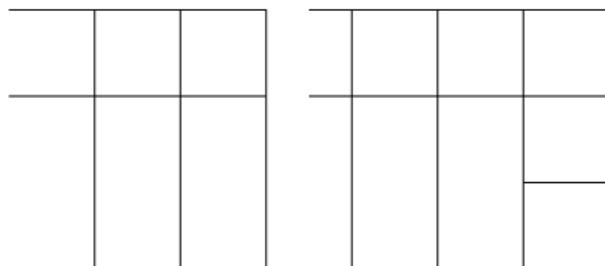
Exemple facile

Exemple d'isométrie par morceaux composée d'une translation et d'une rotation d'angle $\pi/4$.



Pour un des domaines infinis on a $k = 2$.

Si on itère l'application on obtient:



Proposition

On induit sur le secteur infini. On obtient une application similaire à l'originale via

$$\begin{cases} 0 \mapsto 01 \\ 1 \mapsto 1 \end{cases}$$

Proposition

Toutes les cellules sont des carrés, tous les points ont une orbite périodique.

Autres exemples:

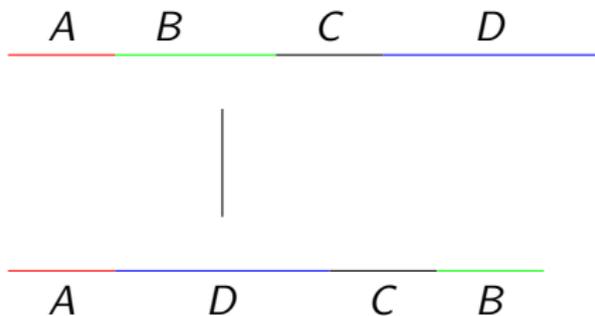
- échange d'intervalles,
- rotation par morceaux d'angle $\pi/5$,
- rotation par morceaux d'angle $\pi/7$,
- ...

$\Sigma =$ langage de (X, T) .

- Complexité.
- Propriétés combinatoires.
- Propriétés dynamiques.

Definition

Un échange d'intervalles est une application de $[0, 1]$ dans lui même bijective qui est localement une translation. Chaque translation est définie sur un intervalle.



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, \pi\right)$$

Formellement on le repère par l longueurs $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ et par une permutation π de l'ensemble $\{1 \dots r\}$.

$$\Delta_i = \left[\sum_{j < i} \lambda_j, \sum_{j \leq i} \lambda_j \right) \quad i = 1 \dots l$$

$$T_{\lambda, \pi}(\xi) = \xi + \sum_{\pi^{-1}j < \pi^{-1}i} \lambda_j - \sum_{j < i} \lambda_j, \quad \xi \in \Delta_i$$

Un codage naturel d'un échange d'intervalles est un mot $x(\xi)$ pour $\xi \in [0, 1)$ ou $x(\xi)_i = j$ si $T^i \xi \in \Delta_j$.

Exemple

Pour un point de l'exemple précédent le codage de l'orbite commence par:

BDBDC ...

Definition (Keane)

Un échange d'intervalles est IDOC s'il n'existe pas de trajectoire reliant deux discontinuités: Les orbites négatives des points $\sum_{j \leq i} \lambda_j, 1 \leq i \leq l - 1$ sont infinies et distinctes.

Proposition

Un échange d'intervalles est IDOC si λ est totalement irrationnel: Il n'y a pas de relation linéaire rationnelle entre les $\lambda_i, i = 1 \dots l$.

Theorem (Keane)

Pour toute permutation irréductible et presque tout λ , alors $T_{\lambda,\pi}$ est minimal.

Theorem (Masur-Veech)

Pour une permutation irréductible π , $T_{\lambda,\pi}$ est uniquement ergodique pour presque tout $\lambda \in \Lambda_r$.

Proposition

Soit v un mot du langage d'un échange d'intervalle. Alors σ_v est un intervalle.

Si l'échange d'intervalle est minimal, tous les mots infinis définissent le même langage.

Theorem (Pytheas Fogg)

Un échange de l intervalles vérifie

$$p(n) \leq (l - 1)n + 1.$$

S'il est IDOC alors

$$p(n) = (l - 1)n + 1.$$

Theorem (Lipatov-Mignosi. Ambroz-Frid-Pelantova)

Le langage de toutes les rotations est de complexité

$$p(n) \sim \frac{n^3}{\pi^2}$$

Le langage de tous les échanges de trois intervalles est de complexité:

$$p(n) \approx n^4$$

Theorem (Delecroix)

Complexité globale des échanges de l intervalles:

$$p(n) = O(n^{1+D})$$

ou D est lié à l'entropie métrique et à un exposant de Lyapunof d'une mesure ergodique.

On conjecture que $p(n) = O(n^{1+l})$.

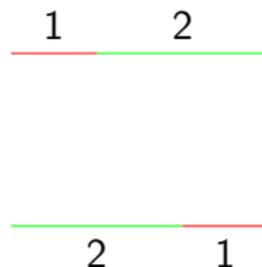
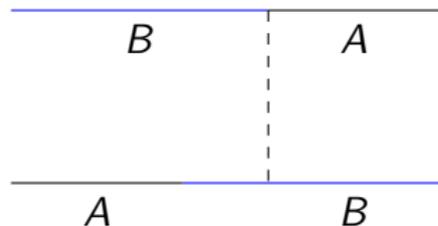
Lien avec systèmes s-adiques.

Proposition

L'induit d'un échange de l intervalles sur un sous intervalle est un échange d'au plus $l + 2$ intervalles.

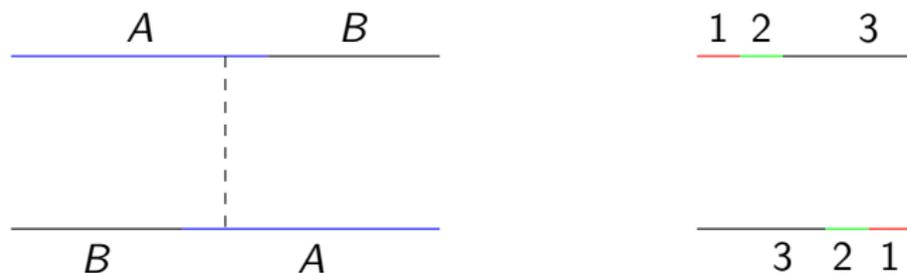
Bonne induction

Exemple d'induction pour une rotation:
L'induit est une rotation.

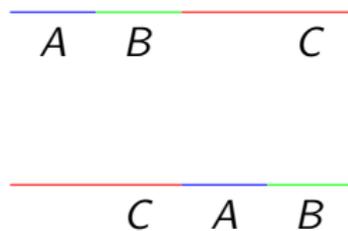
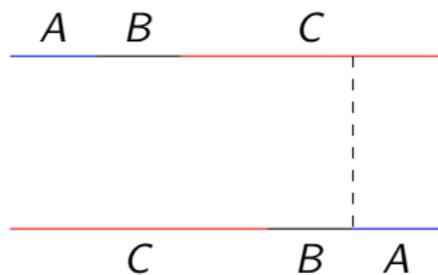


Mauvaise induction

Exemple d'induction pour une rotation:
L'induit est une échange de trois intervalles.



Exemple d'induction pour un échange de trois intervalles:



Ce n'est plus la même combinatoire.

Theorem (Keane)

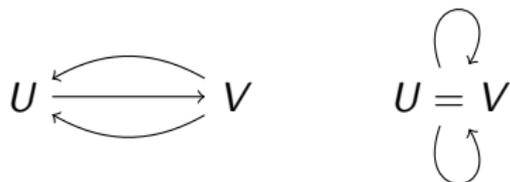
Il existe un échange de quatre intervalles minimal et non uniquement ergodique.

Preuve basée sur l'induction.

Definition

On se donne un langage factoriel L . Pour tout entier n , on dénote par L_n l'ensemble des mots de longueur n dans \mathcal{L} . On peut associer à chaque entier n un graphe, dont les sommets sont les mots de L_n , et il existe une arête entre les sommets u et u' s'il existe deux lettres a et a' dans l'alphabet tel que $au = u'a' \in L_{n+1}$. Ce graphe est le n -ième graphe de Rauzy du langage \mathcal{L} .

Voici des graphes de Rauzy du codage d'une rotation.



Dans le premier cas il y a un mot spécial à gauche et un mot spécial à droite. Dans le deuxième cas, ils sont égaux.

Theorem (Jullian 2011)

Pour un automorphisme positif primitif il existe un algorithme fini déterminant s' il existe un échange d'intervalles auto induit ayant cet automorphisme comme dynamique.

Exemple

$$\begin{cases} a \mapsto bdacda \\ b \mapsto bdbda \\ c \mapsto ccda \\ d \mapsto cda \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Valeur propre dominante λ de la matrice.

$$\pi_0 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \pi_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Description langage échange d'intervalles: Ferenczi-Zamboni.
- Groupe des échange d'intervalles.
- Morphismes préservant mots iet: cas 2, 3 intervalles.
- Complexité globale.
- Translations d'intervalles

Si $r = 2$ on dit que T est une rotation. L'application est alors donnée par

$$\begin{array}{lcl} T & [0, 1) & \rightarrow & [0, 1) \\ & x & \mapsto & \{x + \alpha\} \end{array}$$

Le premier intervalle est $[0, 1 - \alpha)$.

Les mots obtenus comme codages de rotation sont des mots sturmiens si $\lambda \notin \mathbb{Q}$.

$$p_{\xi}(n) = n + 1$$

Lemma

Soit u est un mot infini, s'il existe n tel que $p(n) = p(n + 1)$, alors u est ultimement périodique

Un mot Sturmien est un mot non périodique de complexité minimale.

Theorem

v est un mot sturmien si et seulement si il existe $m \in [0, 1]$ et un vecteur u tel que la demi droite $u + \mathbb{R}u$ soit codée par v . La pente de u est alors irrationnelle.

Lemma

Un mot est sturmien si et seulement si il est équilibré:

Pour tous sous mots finis v, w de même longueur, le nombre de 0 dans chaque mot diffère au plus de 1.

Theorem

Fixons une direction pour le flot du billard:

- *Billard dans le carré: Premier retour sur diagonale: échange de deux intervalles: mot sturmien.*
- *Billard dans le cube : Retour sur hexagone: translation sur le tore: échange de trois morceaux dans hexagone.*
- *Billard dans l'hypercube, même chose.*

Proposition

Dans un mot sturmien :

- il n'existe pas de mot bispécial fort.
- Il n'existe pas de mot bispécial faible.
- Il peut exister des mots bispéciaux neutres.

Proposition

Dans un mot de billard cubique minimal, on a :

- il existe deux mots bispécial forts d'indice 1. Chacun a deux prolongements à droite et gauche.
- Il n'existe pas de mot bispécial faible.
- Il peut exister des mots bispéciaux neutres.

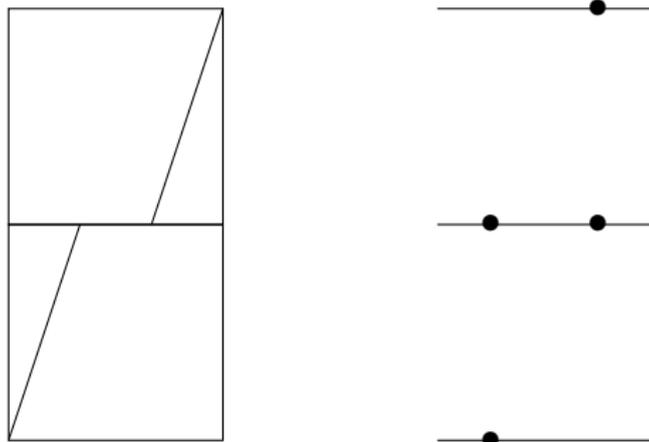


Figure: Un mot bispécial d'indice 0 pour un mot sturmien.



Figure: Echange de morceaux dans le tore \mathbb{T}^2 .

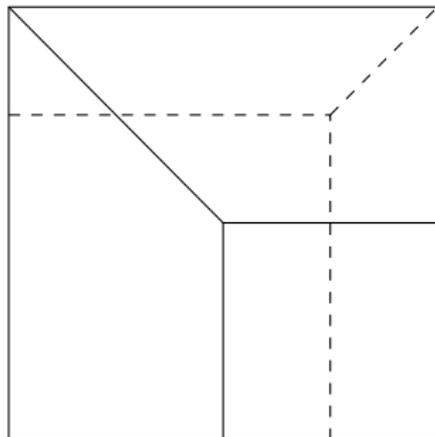
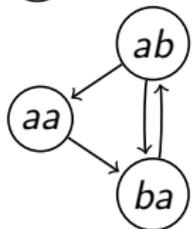
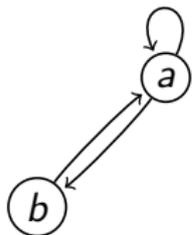


Figure: Mot bispécial d'indice 2.

Theorem

Les graphes de Rauzy du langage du codage d'une rotation minimale sur le tore \mathbb{T}^k ont une caractéristique d'Euler au moins égale à k .

Quelques exemples de graphe de Rauzy pour le mot de Fibonacci: Il correspond à une rotation.



Lemma

Le nombre d'arêtes de R_n est égal au nombre de sommets de R_{n+1} .

On considère les deux substitutions

$$\sigma_a \begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto ba \end{cases} \quad \sigma_b \begin{cases} a \mapsto ab \\ b \mapsto b \end{cases}$$

Proposition

L'ensemble des suite sturmiennes est généré par ces deux morphismes.

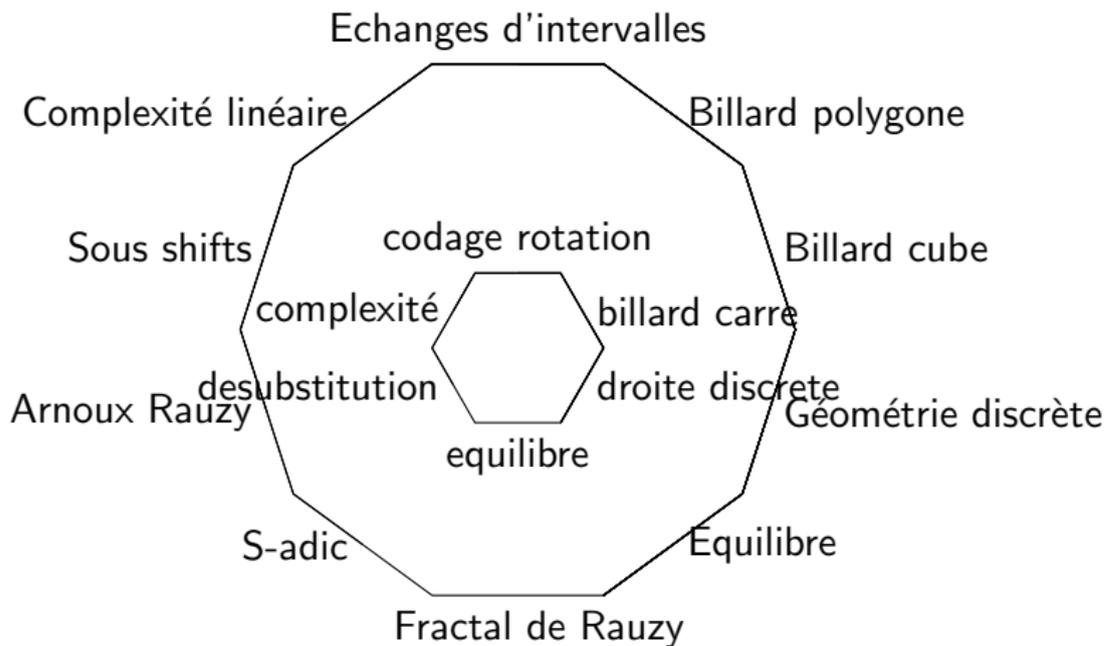
Theorem

Soit u un mot Sturmien de type a , alors il existe v mot Sturmien tel que

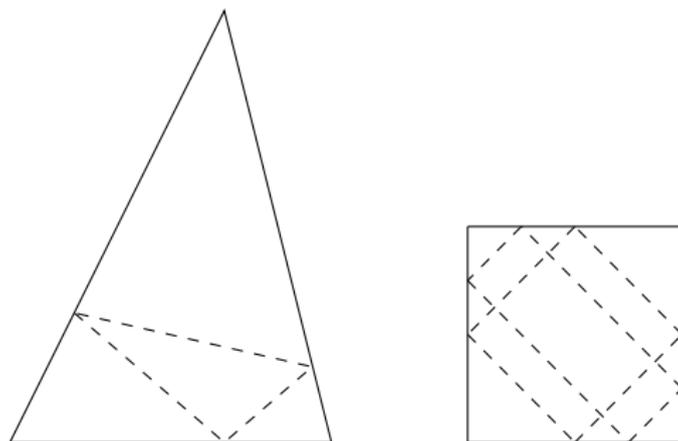
$$u = S\sigma_a(v), \text{ ou } u = \sigma_a(v).$$

S'il est de l'autre type on utilise σ_b .

Voir l'interprétation géométrique.



Billard dans un polytope



Billard polygonal

$$T : \partial P \times \mathbb{R}^n \rightarrow \partial P \times \mathbb{R}^n$$

Le billard est défini pour presque tout point (m, ω) .

On code cette application par les faces du polyèdre.

Soit G le groupe généré par les matrices des réflexions orthogonales par rapport aux faces. L'orbite de (m, ω) est incluse dans $\partial P * G\omega$.

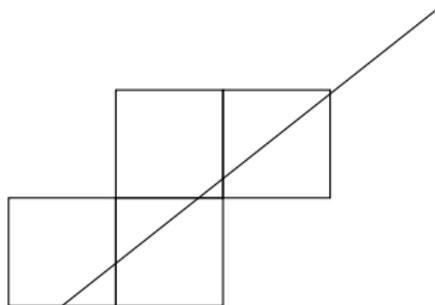
Ce n'est pas une isométrie par morceaux, mais c'est relié à une isométrie.

- Un polygone est rationnel si ses angles sont des multiples rationnels de π .
- Une diagonale généralisée est une trajectoire de billard reliant deux sommets du polygone.

Proposition

Un polygone est rationnel si et seulement si G est fini.

L'orbite de billard de (m, ω) peut se voir comme l'intersection de la demi droite $m + \mathbb{R}\omega$ avec une suite de polytopes images du polytope initial par réflexions.

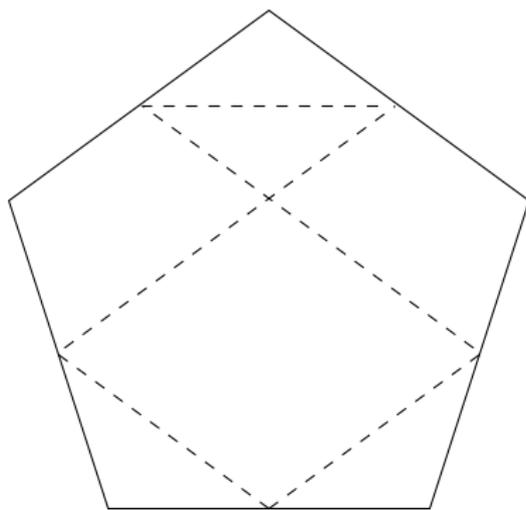


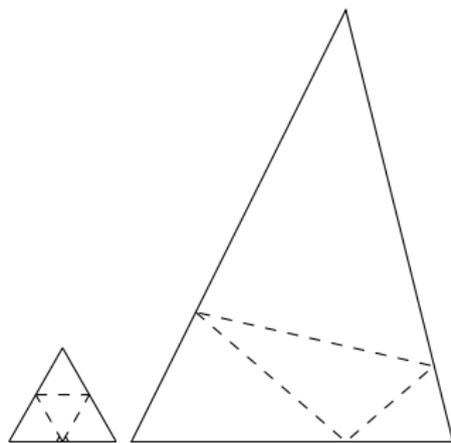
Theorem

- *Dans un polygone rationnel, il y a toujours une orbite de billard périodique.*
- *Dans un triangle aigu, il y a toujours une orbite de billard périodique.*

Theorem

Pour les triangles obtus, résultat partiel de Schwartz.





Une orbite périodique codée par v est stable s'il existe un voisinage du polytope P dans lequel le mot v est périodique pour le billard dans un polytope inclus dans ce voisinage.

Theorem (Galperin-Stepin-Vorobets)

Pour les polygones, un mot de période impaire est toujours stable. Un mot de période paire est stable si et seulement si

$$\sum_i (-1)^i v_i = 0$$

Theorem (B-Rao)

- *Orbite périodique dans le simplexe régulier de \mathbb{R}^n*
- *Critère de stabilité dans \mathbb{R}^3*

Il y a deux systèmes dynamiques pour un polytope rationnel.

- Le billard
- Le billard dans une direction fixée.

On étudie le deuxième dans un polytope rationnel en étudiant des isométries par morceaux.

Proposition

Dans un polytope rationnel, pour toute direction ω l'application de premier retour sur une partie orthogonale à ω^\perp est une isométrie par morceaux.

Exemple

Voir le carré, ou l'hexagone régulier.

Theorem

Pour le carré on a équivalence entre

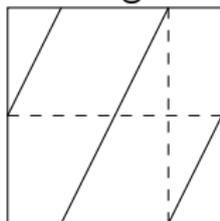
- *Direction minimale*
- *Suite sturmienne*
- *Direction non périodique*

Theorem (Hubert, Smilie-Ulcigrai)

Description du langage du billard dans une direction pour:

- Carré
- Triangle équilatéral, hexagone régulier.
- Polygone régulier général.

On étudie le flot géodésique dans un polygone régulier avec les côtés



identifiés:

Definition

On code le flot avec une lettre par paire de côtés. Soit u une telle suite, on appelle $s(u)$ la suite obtenue en ne gardant que les lettres entourées d'une même lettre.

Le théorème précédent caractérise les suites via cette opération s .

Theorem (Katok)

Tout billard polygonal est d'entropie nulle.

Theorem (Cassaigne-Hubert-Troubetzkoy)

Dans tout billard polygonal rationnel, la complexité vérifie

$$a \leq \frac{p(n)}{n^3} \leq b$$

Theorem (Cassaigne-Hubert-Troubetzkoy)

Dans tout billard polygonal on a

$$p(n) = \sum_{i \leq n} \sum_{j \leq i} N(j)$$

$N(i)$ est le nombre de diagonales généralisées coupant i arêtes entre les deux sommets.

Theorem (Scheglov)

Pour presque tout triangle, pour tout ε il existe C tel que

$$N(n) \leq Ce^{n^\varepsilon}$$

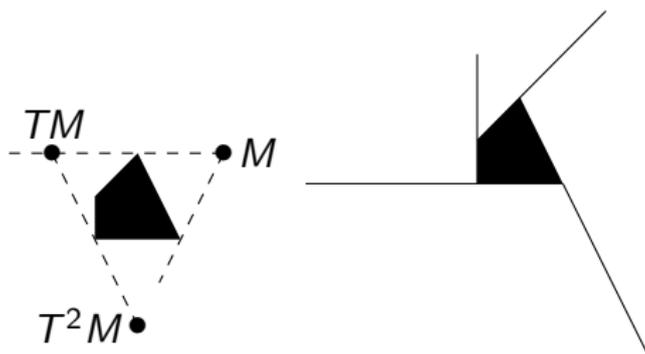
Theorem (B.)

- *Entropie nulle en dimension trois pour un polyèdre convexe.*
- *Trajectoire périodique dans un simplexe régulier.*
- *Complexité billard dans l'hypercube: $p(n) \approx n^{3d-3}$*

- Langage billard dans le cube.
- Orbites périodiques dans un polyèdre.
- Complexité dans un polygone quelconque.
- Vent dans les arbres.

Definition

Le billard dual est défini à l'extérieur d'un polygone convexe par des symétries centrales par rapport aux sommets du polygone. L'extérieur est divisé en secteurs angulaires. Chaque secteur a comme sommet un sommet du polygone et les côtés du secteur sont des prolongements des côtés du polygone.



Trois types de polygones sont importants

Definition

- Polygone rationnel: les sommets sont sur un réseau.
- Polygone quasi-rationnel.
- Kite: Quadrilatère à diagonales perpendiculaires dont l'une est un axe de symétrie.

Theorem (Gutkin-Simany, Li, Schwartz)

Si le polygone est quasi-rationnel, alors toute orbite est bornée.

Si le polygone est rationnel, alors toute orbite est périodique.

Pour le trapèze, toute orbite est bornée.

Pour chaque kite irrationnel il existe des orbites non bornées.

Theorem (Culter)

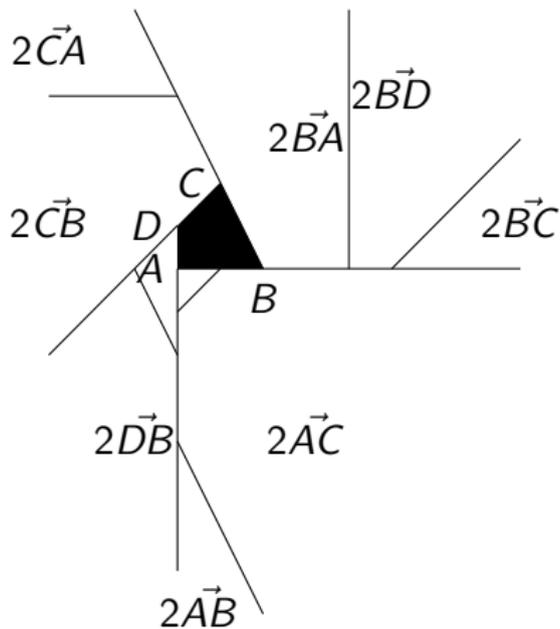
Pour tout polygone, le billard dual a une orbite périodique.

Theorem (B-Cassaigne)

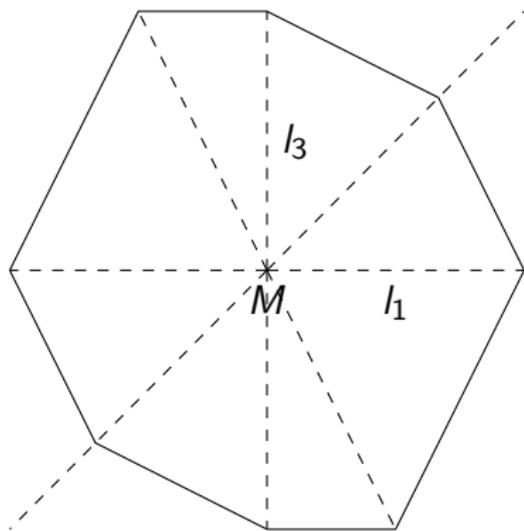
Description du langage du billard dual pour un polygone régulier dont le nombre de côtés vaut:

3, 4, 5, 6, 8, 10

Le carré du billard dual est une translation par morceaux.



Une trajectoire périodique est une ligne polygonale fermée.



Une trajectoire bornée non périodique donne ça:

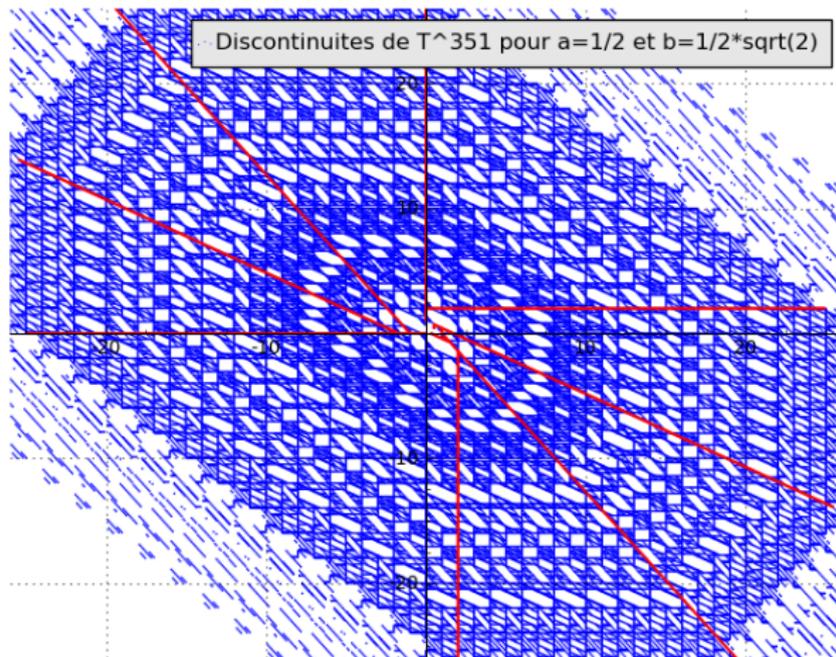


Figure: Orbite d'un point

- Généralisation en dimension quatre
- Plan hyperbolique
- Domaine lisses
- Echange de polytopes: voir PET.

On pose $\zeta = e^{2i\pi/5}$, et on considère les deux triangles

$$P_0 = (0, \zeta + \zeta^2 + \zeta^3, -1)$$

$$P_1 = (0, -1, \zeta^3).$$

Soit T l'application définie par

$$T(x) = \begin{cases} R_0(x), & x \in P_0 \\ R_1(x), & x \in P_1 \end{cases}$$

$$R_0(z) = \zeta^2 z + (\zeta + \zeta^2 + \zeta^3), R_1(z) = \zeta^3 z + \zeta^3.$$

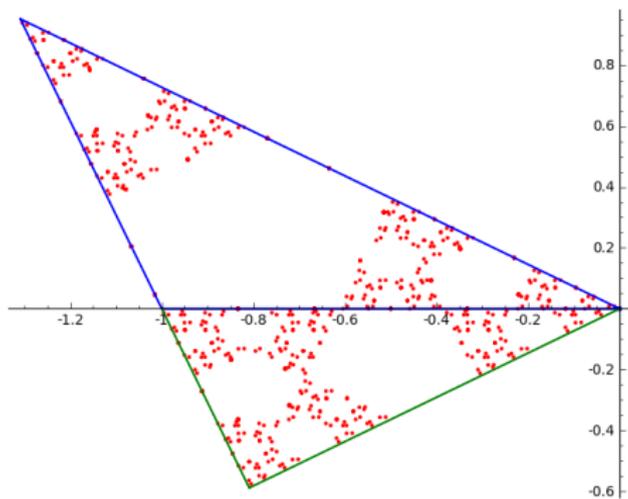


Figure: Orbite de certaines discontinuités

Theorem (Goetz)

Presque tout point a une orbite périodique. L'induction sur P_0 est auto-similaire.

$$1 < \dim_H(E) < 2.$$

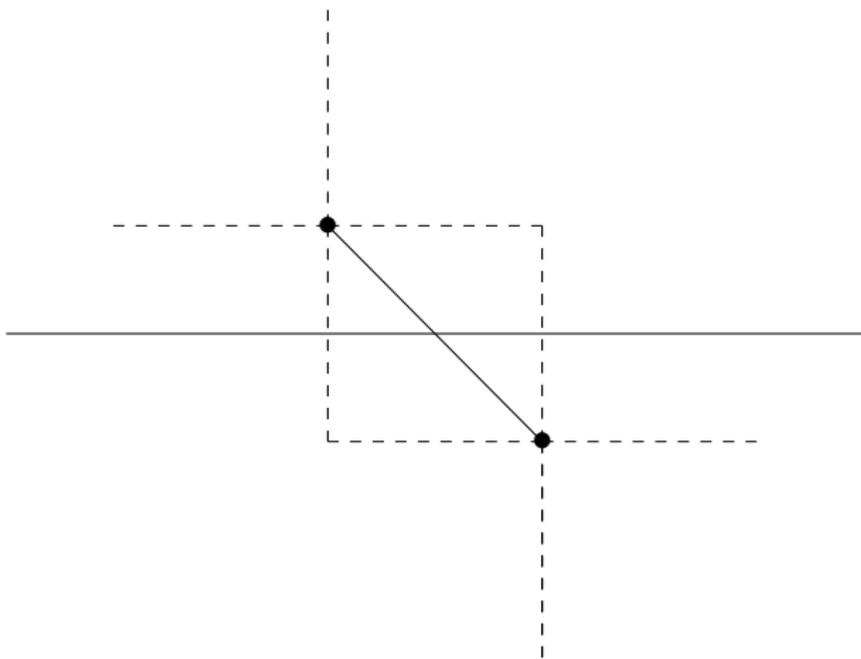


$$T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$
$$T : z \mapsto \begin{cases} e^{i\pi\theta}(z+1) & \text{Im}(z) > 0 \\ e^{i\pi\theta}(z-1) & \text{Im}(z) < 0 \end{cases}$$

Demi plan supérieur: Rotation angle $\pi\theta$

Demi plan inférieur: Rotation angle $\pi\theta$

Different centres.



Angle $\pi/2$: points périodiques.

Deux rotations de même angle θ :

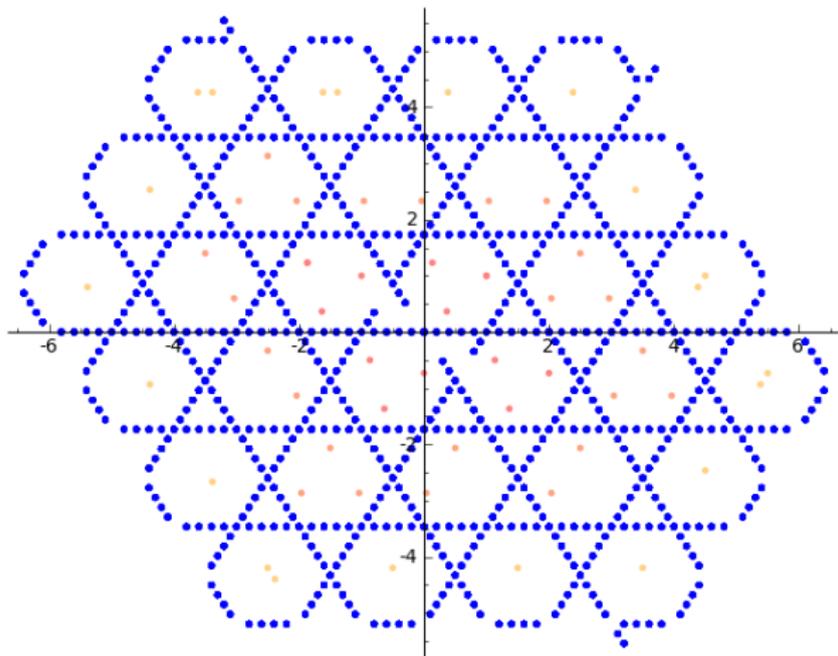
Theorem (Boshernitzan-Goetz)

- *Si T n'est pas injective: Attracteur global.*
- *Si T n'est pas surjective: Application répulsive globalement.*

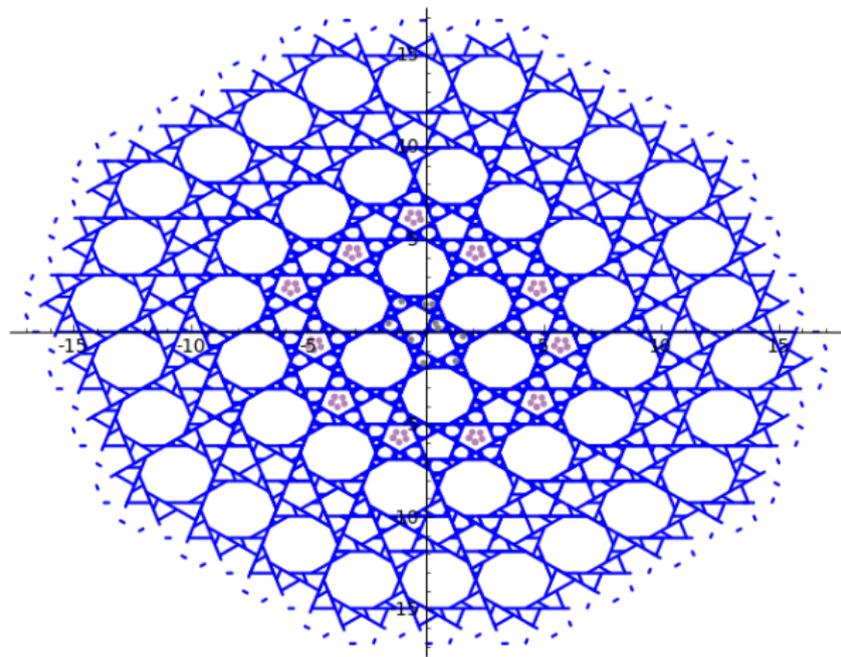
Theorem (Goetz-Quas)

- *T est bijective: Orbites bornées pour valeur rationnelle de θ .*
- *Pour un irrationnel θ : Pour tout ensemble A de mesure positive: presque tout point de A visite A une infinité de fois.*
- *Pour un irrationnel θ : Borne inférieure sur densité orbites périodiques: $3 \log 2 - \frac{\pi^2}{8}$.*

Angle $\pi/3$



Angle $2\pi/5$



Theorem (Bressaud-Poggiaspalla)

Liste des isométries par morceaux bijectives définies dans un compact.

Theorem (Hooper 2012)

Il existe une famille d'échange de rectangles non produit d'échanges d'intervalles qui est renormalisable.

Lien avec le pavage de Truchet.

Soit Λ le réseau engendré par $(1/2, 1/2), (-1/2, 1/2)$. Soit $N = \{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\}$ et $Y = \mathbb{R}^2/\Lambda$. On définit alors $A_1 = [0, 1/2) \times [0, 1/2), A_2 = [0, 1/2) \times [1/2, 1)$.

Definition

L'échange de rectangles est donné par:

$$\begin{array}{ccc} \psi_{\alpha, \beta} & Y * N & \rightarrow & Y * N \\ & ((x, y), v) & \mapsto & (x + bs\alpha, y + as\beta) \quad [\Lambda] \end{array}$$

ou $v = (a, b) \in N$ and $s \in \{\pm 1\}$.

- Classification
- Borne sur la complexité
- Auto induction toujours possible suivant certains critères ?
- Isométrie sans point fixe ? Isométrie avec point orbite dense ?
Isométrie avec orbite non bornée ?

Definition

Définition similaire à un échange d'intervalles, mais l'application n'est plus injective.

On définit alors

$$\Omega = \bigcap_n T^n I.$$

Definition

L'application est de type fini si $T^n I = T^{n+1} I$ pour un entier n . Sinon elle est de type infini. Soit S l'ensemble des translations d'intervalles de type infini.

Theorem (Boshernitzan, Kornfeld)

On suppose T irréductible, on a

- *Il existe des translations par morceaux de type infini.*
- *Si $\dim(\beta_i, \gamma_i) \leq 3$ alors la translation est de type fini.*
- *Sinon Ω est un ensemble de Cantor. La dynamique sur cet ensemble est celle d'un sous shift.*

Theorem (Schmeling-Troubetzkoy)

- *Ω est une union finie d'intervalles si et seulement si à partir d'un certain rang T^n est un échange d'intervalles.*
- *Si T est de type infini et transitif, alors Ω est un ensemble de Cantor.*

Theorem (Bruin-Troubetzkoy)

Si $T_{\overline{\Omega}}$ est transitive, alors elle est minimale.

Soit d la dimension de Hausdorff de $\overline{\Omega}$, alors la mesure de Hausdorff de d est T invariante sur $\overline{\Omega}$.

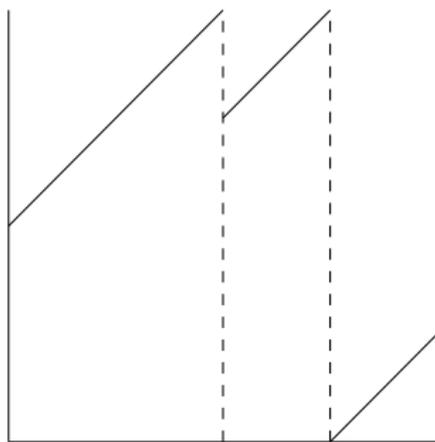
On pose

$$U = \{(\alpha, \beta), \quad 0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1\}.$$

$$L = \{(\alpha, \beta), \quad 0 \leq \alpha \leq \beta + 1 \leq 1\}, R = U \cup L.$$

Pour $(\alpha, \beta) \in U$ on pose

$$T(x) = \begin{cases} x + \alpha & [0, 1 - \alpha) \\ x + \beta & [1 - \alpha, 1 - \beta) \\ x + \beta - 1 & [1 - \beta, 1) \end{cases}$$



Graphe de la translation par morceaux.

On définit l'application G par:

$$G : (\alpha, \beta) \mapsto \left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta - 1}{\alpha} + \left[\frac{1}{\alpha} \right] \right)$$

$$A = \bigcap_n G^{-n}(U)$$

Theorem (Bruin-Troubetzkoy)

- *L'application T est de type infini si et seulement si $(\alpha, \beta) \in A$.*
- *L'ensemble A est de mesure nulle.*
- *Si $(\alpha, \beta) \in A$ la dynamique sur l'ensemble limite est celle d'un système S -adic.*
- *Le nombre de mesures ergodiques est au plus deux.*

Double rotations: Application définie sur l'intervalle unité

$$x \mapsto \begin{cases} x + a & x < c \\ x + b & x > c \end{cases}$$

Theorem (Bruin-Clack)

L'ensemble S est de mesure nulle pour des translations venant de double rotation.

Theorem (Volk)

L'ensemble S est de mesure nulle pour des translations de trois intervalles.

- Notion voisine de celle de translation d'intervalles.
- Induction de Rauzy.
- Travaux de Skripchenko.

- Conjecture sur la densité des échanges d'intervalles.
- Complexité.
- Langage.

Exercice

On considère l'isométrie par morceaux définie par la rotation par morceaux d'angle $\pi/4$:

$$Tz = \begin{cases} e^{i\pi/4}(z+1) & \text{Im}(z) > 0 \\ e^{i\pi/4}(z-1) & \text{Im}(z) < 0 \end{cases}$$

- 1 Dessiner la partition associée à l'application T^n .
- 2 Coder l'orbite d'un point sous cette application en codant par 0 sur le demi plan supérieur et 1 sur le demi plan inférieur.
- 3 Induire l'application sur un cône d'angle $\pi/4$.
- 4 Recommencer avec $\pi/7$.

Exercice

On considère l'application définie sur $A \cup B$ où a est un paramètre réel positif:

$$A = [0, 1]^2, B = [1, 1 + a] * [0, 1]$$

$$T(x, y) = \begin{cases} (1 + a - y, x) & (x, y) \in A \\ (x - 1, 1 - y) & (x, y) \in B \end{cases}$$

- 1 Pour a rationnel, décrire la partition à l'étape n .
- 2 Comprendre la dynamique dans ce cas.
- 3 Etudier le cas $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- 4 Induire sur un rectangle bien choisi.

Exercice

On considère la rotation d'angle $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

- 1 *Ecrire une procédure qui dessine l'orbite d'un point.*
- 2 *Ecrire une procédure qui donne le codage des n premiers termes de l'orbite d'un point.*
- 3 *Comparer les orbites de deux points différents.*

Exercice

On considère un échange de trois intervalles de permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
de longueurs

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{\sqrt{2}}{5}, 1 - \frac{3\sqrt{2}}{5}\right).$$

- 1 *Ecrire une procédure qui dessine l'orbite d'un point.*
- 2 *Cette application est elle minimale ?*

Exercice

On considère un échange de trois intervalles de permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
de longueurs

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2 - \sqrt{3}}{3}\right)$$

- 1 *Ecrire une procédure qui donne le codage des n premiers termes de l'orbite d'un point.*
- 2 *Dessiner les graphes de Rauzy d'ordre 2, 3, 4 associés à l'orbite d'un point.*
- 3 *Ecrire une procédure qui donne l'induit de l'échange d'intervalles sur un sous intervalle.*

Exercice

On considère un carré

- 1 *Ecrire une procédure qui donne l'orbite d'un point pour le billard dual.*
- 2 *Ecrire une procédure qui donne la partition de T^n ou T est l'application billard dual.*
- 3 *Donner le codage de l'orbite d'un point.*
- 4 *Ecrire une procédure qui donne l'induit de l'application sur un secteur.*

Exercice

Refaire la même chose qu'à l'exercice précédent avec

- 1 *Un triangle équilatéral.*
- 2 *Un pentagone régulier.*
- 3 *Un heptagone régulier.*
- 4 *Un trapèze.*

Exercice

Pour le billard dans un carré

- 1 *Ecrire une procédure qui donne l'orbite d'un point dans une direction donnée.*
- 2 *Pour un angle fixé à $\pi/4$ trouver les points périodiques de période 4, 8.*
- 3 *Recommencer avec un angle de $\pi/8$ puis de $\pi/5$.*

Exercice

Pour un hexagone régulier codé par trois lettres (les côtés opposés ayant même codage)

- 1 *Ecrire une procédure qui donne le codage de l'orbite d'un point*
- 2 *Donner le premier retour du flot de billard dans une direction donnée sur une diagonale.*

Exercice

On considère le vecteur $(1, \sqrt{2})$ et la rotation de \mathbb{T}^2 associée.

$$(x, y) \mapsto (x + 1, y + \sqrt{2})$$

- 1 Représenter le tore comme le carré $[0, 1]^2$ et trouver la partition en quatre rectangles associée à cette rotation.
- 2 Dessiner l'orbite d'un point sous cette rotation.
- 3 Obtenir le codage et la complexité.

Exercice

Pour la même rotation qu'à l'exercice précédent

- 1 Donner l'échange de trois morceaux associé à cette rotation
- 2 Coder l'orbite d'un point sous cette rotation.
- 3 Calculer sa complexité.

Exercice

Exercice

On considère la translation par morceaux de Bruin Troubetzkoy

- 1 *Programmer l'orbite d'un point*
- 2 *Dessiner des approximations du fractal limite.*
- 3 *Dessiner des orbites d'un point sous G .*

Exercice

Programme d'une double rotation.

-  Petr Ambrož, Anna Frid, Zuzana Masáková, and Edita Pelantová.
On the number of factors in codings of three interval exchange.
Discrete Math. Theor. Comput. Sci., 13(3):51–66, 2011.
-  Pierre Arnoux, Christian Mauduit, Iekata Shiokawa, and Jun-ichi Tamura.
Complexity of sequences defined by billiard in the cube.
Bull. Soc. Math. France, 122(1):1–12, 1994.
-  Yu. Baryshnikov.
Complexity of trajectories in rectangular billiards.
Comm. Math. Phys., 174(1):43–56, 1995.
-  Nicolas Bedaride and Julien Cassaigne.
Outer billiard outside regular polygons.
J. Lond. Math. Soc. (2), 84(2):303–324, 2011.
-  Henk Bruin and Greg Clack.
Inducing and unique ergodicity of double rotations.
Discrete and Continuous Dynamical Systems, 32, 2012.



N. Bedaride.

Billiard complexity in rational polyhedra.

Regul. Chaotic Dyn., 8(1):97–104, 2003.



Michael Boshernitzan and Arek Goetz.

A dichotomy for a two-parameter piecewise rotation.

Ergodic Theory Dynam. Systems, 23(3):759–770, 2003.



Nicolas Bédaride and Pascal Hubert.

Billiard complexity in the hypercube.

Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 57(3):719–738, 2007.



Michael Boshernitzan and Isaac Kornfeld.

Interval translation mappings.

Ergodic Theory Dynam. Systems, 15(5):821–832, 1995.



Jean Berstel and Michel Pocchiola.

A geometric proof of the enumeration formula for Sturmian words.

Internat. J. Algebra Comput., 3(3):349–355, 1993.



X. Bressaud and G. Poggiaspalla.

A tentative classification of bijective polygonal piecewise isometries.
Experiment. Math., 16(1):77–99, 2007.



H. Bruin and S. Troubetzkoy.

The Gauss map on a class of interval translation mappings.
Israel J. Math., 137:125–148, 2003.



Jérôme Buzzi.

Piecewise isometries have zero topological entropy.
Ergodic Theory Dynam. Systems, 21(5):1371–1377, 2001.



J. Cassaigne, P. Hubert, and S. Troubetzkoy.

Complexity and growth for polygonal billiards.
Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 52(3):835–847, 2002.



Sébastien Ferenczi, Charles Holton, and Luca Q. Zamboni.

Structure of three-interval exchange transformations III: ergodic and spectral properties.
J. Anal. Math., 93:103–138, 2004.



Sébastien Ferenczi and Thierry Monteil.

Infinite words with uniform frequencies, and invariant measures.

In *Combinatorics, automata and number theory*, volume 135 of *Encyclopedia Math. Appl.*, pages 373–409. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.



N. Pytheas Fogg.

Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics, volume 1794 of *Lecture Notes in Mathematics*.

Springer-Verlag, Berlin, 2002.

Edited by V. Berthé, S. Ferenczi, C. Mauduit and A. Siegel.



Sébastien Ferenczi and Luca Q. Zamboni.

Structure of K -interval exchange transformations: induction, trajectories, and distance theorems.

J. Anal. Math., 112:289–328, 2010.



Daniel Genin.

Research announcement: boundedness of orbits for trapezoidal outer billiards.

Electron. Res. Announc. Math. Sci., 15:71–78, 2008.



Arek Goetz.

Dynamics of a piecewise rotation.

Discrete Contin. Dynam. Systems, 4(4):593–608, 1998.



Arek Goetz and Anthony Quas.

Global properties of a family of piecewise isometries.

Ergodic Theory Dynam. Systems, 29(2):545–568, 2009.



Eugene Gutkin and Nándor Simányi.

Dual polygonal billiards and necklace dynamics.

Comm. Math. Phys., 143(3):431–449, 1992.



Patrick W. Hooper.

Truchet tilings and renormalization.

Arxiv 1103.6046.



Pascal Hubert.

Complexité de suites définies par des billards rationnels.

Bull. Soc. Math. France, 123(2):257–270, 1995.



Yann Jullian.

An algorithm to identify automorphisms which arise from self-induced interval exchange transformations.



A. Katok.

The growth rate for the number of singular and periodic orbits for a polygonal billiard.

Comm. Math. Phys., 111(1):151–160, 1987.



Michael Keane.

Non-ergodic interval exchange transformations.

Israel J. Math., 26(2):188–196, 1977.



Steven Kerckhoff, Howard Masur, and John Smillie.

Ergodicity of billiard flows and quadratic differentials.

Ann. of Math. (2), 124(2):293–311, 1986.



Long Li.

On Moser's boundedness problem of dual billiards.

Ergodic Theory Dynam. Systems, 29(2):613–635, 2009.



Howard Masur.

Interval exchange transformations and measured foliations.

Ann. of Math. (2), 115(1):169–200, 1982.



Filippo Mignosi.

On the number of factors of Sturmian words.

Theoret. Comput. Sci., 82(1, Algorithms Automat. Complexity Games):71–84, 1991.



G. Rauzy.

Des mots en arithmétique.

In *Avignon conference on language theory and algorithmic complexity (Avignon, 1983)*, volume 84 of *Publ. Dép. Math. Nouvelle Sér. B*, pages 103–113. Univ. Claude-Bernard, Lyon, 1984.



Dmitri Scheglov.

Complexity growth of a typical triangular billiard is weakly exponential.

Arxiv 1202.1244.



Richard Evan Schwartz.

Hyperbolic symmetry and renormalization in a family of double lattice pets.

Arxiv 1209.2390.



Richard Evan Schwartz.

Outer billiards on kites, volume 171 of *Annals of Mathematics Studies*.

Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.



Richard Evan Schwartz.

Outer billiards and the pinwheel map.

J. Mod. Dyn., 5(2):255–283, 2011.



J. Schmeling and S. Troubetzkoy.

Interval translation mappings.

In *Dynamical systems (Luminy-Marseille, 1998)*, pages 291–302.

World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2000.



John Smillie and Corinna Ulcigrai.

Beyond Sturmian sequences: coding linear trajectories in the regular octagon.

Proc. Lond. Math. Soc. (3), 102(2):291–340, 2011.



Serge Tabachnikov.

Billiards.

Panor. Synth., (1):vi+142, 1995.



Serge Tabachnikov.

A proof of Culter's theorem on the existence of periodic orbits in polygonal outer billiards.

Geom. Dedicata, 129:83–87, 2007.



William A. Veech.

The metric theory of interval exchange transformations. III. The Sah-Arnoux-Fathi invariant.

Amer. J. Math., 106(6):1389–1422, 1984.



Ya. B. Vorobets, G. A. Gal'perin, and A. M. Stëpin.

Periodic billiard trajectories in polygons: generation mechanisms.

Uspekhi Mat. Nauk, 47(3(285)):9–74, 207, 1992.



Ya. B. Vorobets, G. A. Gal'perin, and A. M. Stëpin.

Periodic billiard trajectories in polygons: generation mechanisms.

Uspekhi Mat. Nauk, 47(3(285)):9–74, 207, 1992.



Denis Volk.

Interval translation maps of three intervals reduce to double rotations.

Arxiv 1203.3405.



Yaroslav Vorobets.

Notes on the commutator group of the group of interval exchange transformations.

Arxiv 1109.1352.